Operácie na jazykoch

spísal Tomáš Farský, upravil a doplnil Šimon Sádovský

1 Zadanie

Nech Σ, Γ sú abecedy, $h : \Gamma^* \to \Sigma^*$ je homomorfizmus a L, L_1 a L_2 sú ľubovoľné jazyky nad Σ. Rozhodnite a dokážte, či platia nasledovné inklúzie:

a) $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) \subseteq h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$

b) $h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2) \subseteq h^{-1}(L_1 \cdot L_2)$

c) $L^* \subseteq (L^2)^+ \cup (L \cdot (L^2)^*)$

d) $(L^2)^+ \cup (L \cdot (L^2)^*) \subseteq L^*$

2 Riešenie

a)
Inklúzia neplatí. Uvažujme homomorfizmus $h : \{a\}^* \to \{a, b\}^*$ definovaný takto: $h(a) = ab$.
Uvažujme $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$. Potom platí:

- $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) = h^{-1}(\{a\} \cdot \{b\}) = h^{-1}(\{ab\}) = \{a\}$
- $h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2) = h^{-1}(\{a\}) \cdot h^{-1}(\{b\}) = \varnothing \cdot \varnothing = \varnothing$

Zjavne $\{a\} \subsetneq \varnothing$. $\square$

b)
Inklúzia platí. Dôkaz je nasledovný:
Nech $w \in h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$.
Potom ex. slová w_1, w_2 také, že $w = w_1 \cdot w_2$ a $w_1 \in h^{-1}(L_1)$ a $w_2 \in h^{-1}(L_2)$. (Použijeme definíciu zreťazenia)
Teda platí $h(w_1) \in L_1$ a $h(w_2) \in L_2$. (Použijeme definíciu inverzného homomorfizmu)
Potom platí $h(w_1) \cdot h(w_2) \in L_1 \cdot L_2$. (Použijeme definíciu zreťazenia)
Teda $h(w_1 \cdot w_2) = h(w) \in L_1 \cdot L_2$. (Využijeme, že h je homomorfizmus)
Teda $w \in h^{-1}(L_1 \cdot L_2)$. (Použijeme definíciu inverzného homomorfizmu)
$\square$

c)
Inklúzia neplatí. Uvažujme $L = \{a\}$. Potom:

- $L^* = \{a\}^*$
- $(L^2)^+ \cup (L \cdot (L^2)^*) = \{aa\}^+ \cup \{a\} \cdot \{aa\}^*$

Zjavne $\varepsilon \in \{a\}^*$ a $\varepsilon \notin \{aa\}^+ \cup \{a\} \cdot \{aa\}^*$. $\square$

d)
Inklúzia platí. Nech $w \in (L^2)^+ \cup (L \cdot (L^2)^*)$. Teda $w \in (L^2)^+$ alebo $w \in (L \cdot (L^2)^*)$. Rozoberieme tieto 2 prípady:
1) $w \in (L^2)^+$

Potom ex. $w_1, ..., w_n \in L^2$ pričom $n \geq 1$, také, že $w = w_1 ... w_n$. (Použijeme definíciu kladnej iterácie jazyka)

Teda pre každé w_i ex. $u_{i_1}, u_{i_2} \in L$ také, že $w_i = u_{i_1}u_{i_2}$, pričom $1 \leq i \leq n$. (Použijeme definíciu mocniny jazyka)

Dajúc dokopy predošlé dostávame $w = \underset{\in L}{u_{1_1}}\underset{\in L}{u_{1_2}} \dots \underset{\in L}{u_{n_1}}\underset{\in L}{u_{n_2}}$.

Teda z definíce iterácie jazyka zjavne $w \in L^*$.

2) $w \in (L \cdot (L^2)^*)$

Potom ex. $u \in L$ a $v \in (L^2)^*$ také, že $w = uv$. (Použijeme definíciu zreťazenia)

Teda existujú $v_1, \dots, v_n \in L^2$ také, že $v = v_1 \dots v_n$ pričom $n \in \mathbb{N}$. (Použijem definícu iterácie jazyka)

Uvažujme $1 \leq i \leq n$. Potom pre v_i existujú $v_{i_1}, v_{i_2} \in L$ také, že $v_i = v_{i_1}v_{i_2}$. (Použijeme definíciu mocniny jazyka)

Spojením toho, čo sme doteraz dokázali dostávame $w = \underset{\in L}{u}\,\underset{\in L}{v_{1_1}}\underset{\in L}{v_{1_2}} \dots \underset{\in L}{v_{n_1}}\underset{\in L}{v_{n_2}}$.

Teda z definíce iterácie jazyka zjavne $w \in L^*$.

$\square$