3. sada domácich úloh

Terézia Kabátová

1. **Zadanie:**

   a) Uvažujme tabuľku rozhodnuteľnosti otázok o triedach Chomského hierarchie, ktorá sa vyskytla na prednáške a ktorú môžete nájsť v skriptách na strane 86. Doplňte do tejto tabuľky nasledovný riadok a vaše odpovede odôvodnite:

   $$\text{Pre dané } G_1, G_2, G_3 \text{ zistiť, či } (L(G_1) \cup L(G_2))^R = L(G_3)^2.$$

   Riešenie: Ako prvé ukážeme, že pre $\mathcal{R}$ je problém rozhodnuteľný. Máme dané regulárne gramatiky G_1, G_2 a G_3. Trieda $\mathcal{R}$ je uzavretá na zjednotenie, reverz aj zreťazenie. Navyše, dôkazy týchto tvrdení o uzavretosti sú konštrukčné a ukazujú aj ako algoritmicky zostrojiť regulárne gramatiky G' a G'' [1], také, že platí $L(G') = (L(G_1) \cup L(G_2))^R$ a $L(G'') = L(G_3) \cdot L(G_3) = L(G_3)^2$. Rovnosť regulárnych jazykov $L(G')$ a $L(G'')$ je podľa výsledku z tabuľky rozhodnuteľná.

   Ukážeme, že pre triedu $\mathscr{L}_{CF}$ tento problém nie je rozhodnuteľný. Budeme postupovať sporom. Nech je problém rozhodnuteľný. Nech G_1 je ľubovoľná bezkontextová gramatika. Vezmime bezkontextovú gramatiku G_2 takú, že generuje prázdny jazyk a bezkontextovú gramatiky G_3 ktorá generuje všetky slová nad abecedou $\Sigma = \Sigma_{L(G_1)}$ [2].

   $$L(G_2) = \emptyset \qquad\qquad L(G_3) = \Sigma^*$$

   Zjavne G_2 a G_3 s požadovanými vlastnosťami vieme zostrojiť. Navyše, ku G_1 vieme na základe konštrukcie z prednášky algoritmicky zostrojiť bezkontextovú gramatiku G'_1 takú, že $L(G'_1) = L(G_1)^R$. Pre uvedené G'_1, G_2 a G_3 teraz rozhodnime problém zo zadania. Dostávame

   $$(L(G'_1) \cup L(G_2))^R = (L(G'_1) \cup \emptyset)^R = L(G'_1)^R = L(G_1)$$
   $$L(G_3)^2 = (\Sigma^*)^2 = \Sigma^*$$

   Teda ak by sme vedeli rozhodnúť skúmaný problém, vedeli by sme týmto spôsobom rozhodnúť aj $L(G_1) = \Sigma^*$ pre ľubovoľnú bezkontextovú gramatiku G_1. To ale vieme, že je nerozhodnuteľné pre bezkontextové jazyky, teda dospeli sme k sporu.

   Z nerozhodnuteľnosti pre $\mathscr{L}_{CF}$ vyplýva aj nerozhodnuteľnosť pre $\mathscr{L}_{ECS}$ a $\mathscr{L}_{RE}$.

   b) Je pre dané LBA A, slovo w a symbol c rozhodnuteľné, či A dokáže akceptovať w bez toho, aby niekedy počas výpočtu zapísalo na pásku c?

   Riešenie: Pre kontextové jazyky je rozhodnuteľné $w \in L(A)$. Nech $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$. Zostojíme LBA $A' = (K, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, F)$, ktorý získame z A odstránením všetkých prechodov, kde by na pásku zapísal symbol c. Prechodovú funkciu A' teda môžeme popísať nasledovne.

   $$\forall p, q \in K \ \forall a, b \in \Gamma \cup \{¢, \$\} \ \forall d \in \{-1, 0, 1\} : (\delta(p, a) \ni (q, b, d) \wedge b \neq c) \Leftrightarrow \delta'(p, a) \ni (q, b, d)$$

   Ak existoval akceptačný výpočet automatu A pre slovo w, ktorý zapísal c na pásku, A' ho nevie použiť. Výpočet automatu A musel aspoň raz použiť prechod, ktorý na pásku zapísal c, no A' takéto prechody nemá k dispozícii a v "kopírovaní" výpočtu sa na takomto mieste zasekne. Ak A' slovo w aj tak akceptuje, znamená to, že pre A musel existovať aspoň jeden výpočet, ktorý nezapísal symbol c a teda A' ho mohol zopakovať celý. Musí platiť

   $$w \in L(A') \Leftrightarrow \text{ pôvodný automat } A \text{ akceptuje } w \text{ bez zapísania symbolu } c \text{ na pásku počas výpočtu}$$

   Príslušnosť slova do kontextového jazyka je podľa výsledkov z tabuľky rozhodnuteľná, teda aj tento problém je rozhodnuteľný.

[1] Používame štandardné konštrukcie z prednášok.

[2] Použijeme abecedu terminálov G_1.

2. **Zadanie:**

a) Uvažujme nasledovný jazyk kódov deterministických Turingových strojov:

$$L = \{\langle A \rangle \mid L(A) \subseteq L_{HALT}\}$$

Platí $L \in \mathscr{L}_{rec}$? Ak nie, platí aspoň $L \in \mathscr{L}_{RE}$?

Riešenie: Jazyk môžeme chápať ako vlastnosť $\mathscr{L}_{RE}$, pretože opisuje podmožinu tejto triedy, kde pre každý jazyk platí $L(A) \subseteq L_{HALT}$, Môžeme teda použiť Rice-ove vety.

Zjavne $\Sigma^*_{L_{HALT}} \nsubseteq L_{HALT}$ ale napríklad $\emptyset \subseteq L_{HALT}$, teda vlastnosť nie je triviálna a podľa prvej Rice-ovej vety vieme, že nie je rozhodnuteľná. Pomocou druhej Rice-ovej vety vieme zistiť, či je aspoň čiastočne rozhodnuteľná. Skúmanú vlastnosť označíme S. Podľa prvej podmienky ak pre nejaký $L \in \mathscr{L}_{RE}$ platí $L \in S$, tak všetky $L' \in \mathscr{L}_{RE}$, ktoré sú nadmnožinou L, musia spĺňať $L' \in S$. Táto podmienka nie je splnená. Napríklad vieme, že $\emptyset \in S$, $\emptyset \subseteq \Sigma^*_{L_{HALT}}$ ale $\Sigma^*_{L_{HALT}} \notin S$. Vlastnosť teda nie je ani čiastočne rozhodnuteľná, tým pádom pre príslušný jazyk zo zadania platí $L \notin \mathscr{L}_{RE}$.

b) Uvažujme nasledovný jazyk kódov deterministických Turingových strojov:

$$L = \{\langle A \rangle \mid L_{HALT} \subseteq L(A) \subseteq L_U\}$$

Platí $L \in \mathscr{L}_{rec}$? Ak nie, platí aspoň $L \in \mathscr{L}_{RE}$?

Riešenie: Opäť vieme skúmať jazyk ako vlasnosť, ktorú označíme S. Jazyky L_{HALT} a L_U sú v opačnom vzťahu ako je požadované v skúmanej vlastnosti. Oba pozostávajú zo slov, ktoré reprezentujú kód DTS so vstupným slovom. Pre výpočet s daným vstupom môžu nastať tri prípady:

- nikdy neskončí a počas výpočtu nepríde do akceptačnej konfigurácie
- automat sa zasekne v neakceptačnej konfigurácii
- automat sa zasekne v akceptačnej konfigurácii

L_U obsahuje iba dvojice, ktoré spadajú pod tretí prípad, zatiaľčo L_{HALT} obsahuje aj dvojice z druhého prípadu, pričom ľahko vidno, že pre každú z troch možností existuje aspoň jedna dvojica DTS a slovo také, že pre ne platí daná možnosť. Zjavne teda vzťah medzi jazykmi je $L_U \subsetneq L_{HALT}$ a podmienka v definícii vlastnosti nemôže byť splnená. Teda neexistuje jazyk $L \in \mathscr{L}_{RE}$, taký, že $L \in S$, teda valstnosť je triviálna a podľa prvej Rice-ovej vety rozhodnuteľná. Pre príslušný jazyk zo zadania platí $L \in \mathscr{L}_{rec}$.