Úloha 1

Vezmime $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{ECS}$. Potom existujú LBA $A_1 = \left(K_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, (q_0)_1, F_1\right), A_2 = \left(K_2, \Sigma_2, \Gamma_2, \delta_2, (q_0)_2, F_2\right)$ také, že $L(A_1) = L_1$ a $L(A_2) = L_2$. Navyše, z Immermanovej vety existuje aj LBA $A_2' = \left(K_2', \Sigma_2, \Gamma_2', \delta_2', (q_0)_2', F_2'\right)$ taký, že $L(A_2') = L_2^C$.
Nech BUNV sú $K_1, K_2, K_2', \{\texttt{FIRST\_PART}, \texttt{SECOND\_PART}, \texttt{COMPLEMENT}_0, \texttt{COMPLEMENT}_1, \texttt{FIND\_ENDS}, \texttt{RETURN}\}$ množiny po dvoch disjunktné. Teraz zostrojme 4-páskový[1] LBA $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, pričom

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_2' \cup \{\texttt{FIRST\_PART}, \texttt{SECOND\_PART}, \texttt{COMPLEMENT}_0, \texttt{COMPLEMENT}_1, \texttt{FIND\_ENDS}, \texttt{RETURN}\},$$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_2', q_0 = \texttt{FIRST\_PART}, F = F_2'$ a prechodová funkcia δ spĺňa $\forall a \in \Sigma, \forall b, c, d \in \{\mathbf{B}, \$\}, \forall f, g, h \in \Gamma \cup \{¢\}, \forall f', g', h' \in \Gamma \cup \{¢, \$\}, \forall r \in K_1 - F_1, \forall r_F \in F_1, \forall s \in K_2 - F_2, \forall s_F \in F_2, \forall t \in K_2' - F_2, \forall t_F \in F_2', \forall i \in \{0, 1\}$ rovnosti (pričom žiadne iné prechody v A neexistujú)

$$\delta\left(\texttt{FIRST\_PART}, \begin{pmatrix} a \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(\texttt{FIRST\_PART}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \left(\texttt{SECOND\_PART}, \begin{pmatrix} a \\ \mathbf{B} \\ a \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\}, \tag{1}$$

$$\delta\left(\texttt{FIRST\_PART}, \begin{pmatrix} \$ \\ \$ \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(\texttt{SECOND\_PART}, \begin{pmatrix} \$ \\ \$ \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\}, \tag{2}$$

$$\delta\left(\texttt{SECOND\_PART}, \begin{pmatrix} a \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(\texttt{SECOND\_PART}, \begin{pmatrix} a \\ \mathbf{B} \\ a \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\}, \tag{3}$$

$$\delta\left(\texttt{SECOND\_PART}, \begin{pmatrix} \$ \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(\texttt{COMPLEMENT}_0, \begin{pmatrix} \$ \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\}, \tag{4}$$

$$\delta\left(\texttt{COMPLEMENT}_0, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(\texttt{COMPLEMENT}_1, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\}, \tag{5}$$

$$\delta\left(\texttt{COMPLEMENT}_1, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(\texttt{COMPLEMENT}_0, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}\right) \;\middle|\; \forall e \in \Sigma_2\right\}, \tag{6}$$

$$\delta\left(\texttt{COMPLEMENT}_i, \begin{pmatrix} ¢ \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(\texttt{RETURN}, \begin{pmatrix} ¢ \\ \$ \\ \$ \\ \$ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right\}, \tag{7}$$

$$\delta\left(\texttt{RETURN}, \begin{pmatrix} ¢ \\ a \\ g \\ h \end{pmatrix}\right) \ni \left(\texttt{RETURN}, \begin{pmatrix} ¢ \\ a \\ g \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \tag{8}$$

[1] využívajúc formalizáciu prezentovanú na cvičeniach, t. j. konfigurácie cez poschodové symboly a prechodová funkcia ide z dvojíc (stav, štvorica čítaných symbolov) do trojíc (stav, štvorica zapisovaných symbolov, štvorica posunov)

$$\delta\left(\texttt{RETURN}, \begin{pmatrix} ¢ \\ f \\ a \\ h \end{pmatrix}\right) \ni \left(\texttt{RETURN}, \begin{pmatrix} ¢ \\ f \\ a \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \tag{9}$$

$$\delta\left(\texttt{RETURN}, \begin{pmatrix} ¢ \\ f \\ g \\ a \end{pmatrix}\right) \ni \left(\texttt{RETURN}, \begin{pmatrix} ¢ \\ f \\ g \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \tag{10}$$

$$\delta\left(\texttt{RETURN}, \begin{pmatrix} ¢ \\ ¢ \\ ¢ \\ ¢ \end{pmatrix}\right) = \left\{\left((q_0)_1, \begin{pmatrix} ¢ \\ ¢ \\ ¢ \\ ¢ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\}, \tag{11}$$

$$\delta\left(r, \begin{pmatrix} ¢ \\ f' \\ ¢ \\ ¢ \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(p, \begin{pmatrix} ¢ \\ x \\ ¢ \\ ¢ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \;\middle|\; \forall (p, x, \Delta) \in \delta_1(r, f')\right\}, \tag{12}$$

$$\delta\left(r_F, \begin{pmatrix} ¢ \\ f' \\ ¢ \\ ¢ \end{pmatrix}\right) = \left\{\left((q_0)_2, \begin{pmatrix} ¢ \\ f' \\ ¢ \\ ¢ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right\}, \tag{13}$$

$$\delta\left(s, \begin{pmatrix} ¢ \\ f' \\ g' \\ ¢ \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(p, \begin{pmatrix} ¢ \\ f' \\ x \\ ¢ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}\right) \;\middle|\; \forall (p, x, \Delta) \in \delta_2(s, g')\right\}, \tag{14}$$

$$\delta\left(s_F, \begin{pmatrix} ¢ \\ f' \\ g' \\ ¢ \end{pmatrix}\right) = \left\{\left((q_0)'_2, \begin{pmatrix} ¢ \\ f' \\ g' \\ ¢ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}\right)\right\}, \tag{15}$$

$$\delta\left(t, \begin{pmatrix} ¢ \\ f' \\ g' \\ h' \end{pmatrix}\right) = \left\{\left(p, \begin{pmatrix} ¢ \\ f' \\ g' \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \end{pmatrix}\right) \;\middle|\; \forall (p, x, \Delta) \in \delta'_2(t, h')\right\}. \tag{16}$$

Automat najskôr pomocou (1) kopíruje symboly zo vstupnej (prvej) pásky na druhú pásku až do momentu, keď sa nedeterministicky rozhodne kopírovať ich ďalej na tretiu pásku. Pokiaľ sa tak rozhodne až po prečítaní celého vstupného slova, urobí to pomocou (2). Ďalej pomocou (3) kopíruje symboly na tretiu pásku.
Keď príde na koniec, pomocou (4) prejde na určovanie slova z L_2^C. Teraz striedaním (5) a (6) si pre každé druhé písmeno vstupného slova nedeterministicky tipne písmeno a zapíše ho na štvrtú pásku. Tým pre vstupné slovo dĺžky n tipne $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ písmen, čo vieme interpretovať aj tak, že nedeterministicky tipne slovo takej dĺžky a zapíše ho na štvrtú pásku. Po tom, ako sa na vstupnej páske vráti na začiatok, na zvyšných páskach pomocou (7) slová zakončí dolármi a pomocou (8), (9), (10) sa na týchto troch páskach vráti na začiatok, pričom kým sa môže posúvať doľava na viac ako jednej páske, nedeterministicky si vyberie, na ktorej sa o jeden krok doľava posunie.
Následne už len overí, či slová patria do jazykov, do ktorých majú. Prechodom (11) začne pomocou (12) simulovať A_1 na druhej páske, pričom po akceptácii prejde (13) na simuláciu A_2 na tretej páske pomocou (14). V prípade akceptácie aj tohto prechodom (15) začne pomocou (16) simulovať A'_2 na poslednej páske.
Automat A akceptuje práve vtedy, keď simulácie A_1 na druhej páske, A_2 na tretej páske, A'_2 na štvrtej páske skončili všetky akceptáciou. Vstupné slovo v sa teda dá rozdeliť na $v = v_1 v_2$, pričom $v_1 \in L(A_1) = L_1$, $v_2 \in L(A_2) = L_2$. Z toho ale $v \in L_1 L_2$. Zároveň sme na štvrtej páske mali slovo u, ktorého dĺžka spĺňa $|u| = \left\lfloor \frac{|v|}{2} \right\rfloor$ a $u \in L(A'_2) = L_2^C$.
Z toho už je ale očividné, že $L(A) = \varphi(L_1, L_2)$, pričom vzhľadom k tomu, že viacpáskové LBA sú ekvivalentné klasickým, existuje LBA akceptujúci $\varphi(L_1, L_2)$, čiže nutne $\varphi(L_1, L_2) \in \mathcal{L}_{ECS}$, z čoho $\mathcal{L}_{ECS}$ je uzavretá na φ. $\square$

Úloha 2

Pre účely úlohy uvažujme homomorfizmus

$$\mathrm{erase}(x) = \begin{cases} x & x \in \Sigma_{PKP}, \\ \varepsilon & x = \#. \end{cases}$$

Ďalej, nech pre slovo $w = w_1 w_2 \cdots w_m$ označuje $\overline{w} = w_1 \# w_2 \# \cdots \# w_m$ označuje vloženie mriežky medzi každé dva symboly slova. Je očividné, že $\mathrm{erase}(\overline{w}) = w$ a takisto, že $\overline{uv} = \overline{u}\#\overline{v}$.

Chceme ukázať, že FPKP je rozhodnuteľný práve vtedy, keď je rozhodnuteľný PKP. Preskúmajme dve implikácie.

„$\Rightarrow$“: Predpokladajme, že FPKP vieme rozhodovať. Zoberme si následne inštanciu PKP (X, Y) a vytvorme k nej inštanciu FPKP (X, Y, B, R), kde $B = \emptyset, R = \{1, \ldots, n\}$. Ukážeme, že (X, Y) má riešenie práve vtedy, keď má riešenie aj (X, Y, B, R). Tým ukážeme, že vieme rozhodovať aj PKP.

- „$\Rightarrow$“: Predpokladajme, že (X, Y) má riešenie, a teda $\exists k > 0, \exists i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ také, že $x_{i_1} \cdots x_{i_k} = y_{i_1} \cdots y_{i_k}$. Potom ale $k' = k, l' = 0, i'_x = i_x$ očividne spĺňajú všetky podmienky riešenia inštancie FPKP (X, Y, B, R) – $k' + l' = k > 0, i'_1, \ldots, i'_k \in \{1, \ldots, n\} = R$ a $x_{i'_1} \cdots x_{i'_k} = y_{i'_1} \cdots y_{i'_k}$.
- „$\Leftarrow$“: Predpokladajme, že (X, Y, B, R) má riešenie, a teda $\exists k, l \in \mathbb{N}, k + l > 0, \exists i_1, \ldots, i_k \in R, j_1, \ldots, j_l \in B$ také, že $x_{i_1} \cdots x_{i_k} x_{j_1} \cdots x_{j_l} = y_{i_1} \cdots y_{i_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l}$. Avšak, keďže $B = \emptyset$, tak $l = 0$, ale potom očividne $(i_1, \ldots, i_k)$ je riešením (X, Y).

„$\Leftarrow$“: Predpokladajme, že PKP vieme rozhodovať. Zoberme si následne inštanciu FPKP (X, Y, B, R) a vytvorme k nej inštanciu PKP (X', Y') takú, že

$$\begin{aligned} x'_i &= \overline{x_i}\#, & y'_i &= \#\overline{y_i}, & &\forall i \in R, \\ x'_j &= \#\overline{x_j}, & y'_j &= \overline{y_j}\#, & &\forall j \in B, \\ x'_{n+i} &= \overline{x_i}, & y'_{n+i} &= \#\overline{y_i}\#, & &\forall 1 \le i \le n, \\ x'_{2n+1} &= \#\#, & y'_{2n+1} &= \#. \end{aligned}$$

Zostáva ukázať, že (X, Y, B, R) má riešenie práve vtedy, keď má riešenie aj (X', Y'). Tým ukážeme, že vieme rozhodovať aj FPKP.

- „$\Rightarrow$“: Predpokladajme, že (X, Y, B, R) má riešenie $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l)$. Očividne k, l nemôžu byť obe nulové súčasne. Ak $k > 0$, tak riešením (X', Y') je $(2n + 1, i_1, \ldots, i_{k-1}, n + i_k, j_1, \ldots, j_l, 2n + 1)$, pretože

$$\begin{aligned} x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} x_{i_k} x_{j_1} \cdots x_{j_l} &= y_{i_1} \cdots y_{i_{k-1}} y_{i_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l}, \\ \#\#\overline{x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} x_{i_k} x_{j_1} \cdots x_{j_l}}\#\# &= \#\#\overline{y_{i_1} \cdots y_{i_{k-1}} y_{i_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l}}\#\#, \\ \#\#\overline{x_{i_1}}\# \cdots \#\overline{x_{i_{k-1}}}\#\overline{x_{i_k}}\#\overline{x_{j_1}}\# \cdots \#\overline{x_{j_l}}\#\# &= \#\#\overline{y_{i_1}}\# \cdots \#\overline{y_{i_{k-1}}}\#\overline{y_{i_k}}\#\overline{y_{j_1}}\# \cdots \#\overline{y_{j_l}}\#\#, \\ (\#\#)(\overline{x_{i_1}}\#) \cdots (\overline{x_{i_{k-1}}}\#)(\overline{x_{i_k}})(\#\overline{x_{j_1}}) \cdots (\#\overline{x_{j_l}})(\#\#) &= (\#)(\#\overline{y_{i_1}}) \cdots (\#\overline{y_{i_{k-1}}})(\#\overline{y_{i_k}}\#)(\overline{y_{j_1}}\#) \cdots (\overline{y_{j_l}}\#)(\#), \\ x'_{2n+1} x'_{i_1} \cdots x'_{i_{k-1}} x'_{n+i_k} x'_{j_1} \cdots x'_{j_l} x'_{2n+1} &= y'_{2n+1} y'_{i_1} \cdots y'_{i_{k-1}} y'_{n+i_k} y'_{j_1} \cdots y'_{j_l} y'_{2n+1}. \end{aligned}$$

  Podobne vieme pre $l > 0$ ukázať, že riešením (X', Y') je $(2n + 1, i_1, \ldots, i_k, n + j_1, j_2, \ldots, j_l, 2n + 1)$.
- „$\Leftarrow$“: Predpokladajme, že (X', Y') má riešenie $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Nech BUNV nemá ako „prefix“ kratšie riešenie, čiže $\forall j < k$ postupnosť $(i_1, \ldots, i_j)$ nie je riešením (X, Y). Zreťazené slová sa nutne musia zhodovať v prvom symbole, preto nutne $i_1 = 2n + 1$. Ak by aj $i_2 = 2n + 1$, jediné domino, ktoré neporuší dve prečnievajúce mriežky hore, je opäť $i_3 = 2n + 1$. Tým by sme indukciou dostali nekonečnú postupnosť $2n + 1$, spor. Preto $i_2 \neq 2n + 1$. Takisto je očividné, že $i_2 \notin B$.
  Indukciou by nebolo ťažké nahliadnuť, že až na 2 mriežky na začiatku sa nám v nedokončenom riešení striedajú mriežky a symboly Σ_{PKP}. To však znamená, že
  - ∗ za dominom s indexom $2n + 1$ môžu nasledovať iba dominá s indexami z intervalu $[n + 1, 2n]$ a indexami z R,
  - ∗ za dominom s indexom z R môžu nasledovať iba dominá s indexami z R a indexami z intervalu $[n + 1, 2n]$,

* za dominom s indexom z intervalu $[n+1, 2n]$ môžu nasledovať iba dominá s indexom z B, poprípade domino s indexom $2n+1$ – to však kvôli striedaniu symbolov iba v prípade, že dosadnú dvojice mriežok pekne pod seba, a teda ide o i_k,
* za dominom s indexom z B môžu nasledovať iba dominá s indexami z B, poprípade domino s indexom $2n+1$ s rovnakým dodatkom ako vyššie.

Z toho už ale jasne vyplýva, že $(i_1, \ldots, i_k) \in \{2n+1\} \times R^* \times \{n+1, \ldots, 2n\} \times B^* \times \{2n+1\}$. Nech $1 < j < k$ je také, že $i_j \in \{n+1, \ldots, 2n\}$. Potom $i_m \in R\ \forall 1 < m < j$ a $i_m \in B\ \forall j < m < k$. Ak $i_j - n \in R$, tvrdíme, že riešením FPKP sú $i_2, \ldots i_{j-1}, i_j - n \in R$, $i_{j+1}, \ldots, i_{k-1} \in B$, pretože

$$\begin{aligned} x'_{i_1}x'_{i_2}\cdots x'_{i_{j-1}}x'_{i_j}x'_{i_{j+1}}\cdots x'_{i_{k-1}}x'_{i_k} &= y'_{i_1}y'_{i_2}\cdots y'_{i_{j-1}}y'_{i_j}y'_{i_{j+1}}\cdots y'_{i_{k-1}}y'_{i_k}, \\ \text{erase}(x'_{2n+1}x'_{i_2}\cdots x'_{i_{j-1}}x'_{i_j}x'_{i_{j+1}}\cdots x'_{i_{k-1}}x'_{2n+1}) &= \text{erase}(y'_{2n+1}y'_{i_2}\cdots y'_{i_{j-1}}y'_{i_j}y'_{i_{j+1}}\cdots y'_{i_{k-1}}y'_{2n+1}), \\ x_{i_2}\cdots x_{i_{j-1}}x_{i_j-n}x_{i_{j+1}}\cdots x_{i_{k-1}} &= y_{i_2}\cdots y_{i_{j-1}}y_{i_j-n}y_{i_{j+1}}\cdots y_{i_{k-1}}. \end{aligned}$$

Podobne vieme ukázať, že ak $i_j - n \in B$, tak riešením FPKP sú indexy $i_2, \ldots i_{j-1} \in R$, $i_j - n, i_{j+1}, \ldots, i_{k-1} \in B$.

□