

## SADA ÚLOH NA CVIČENIE 4

---

### Definície:

**Pravý kvocient:** Nech  $L_1$  a  $L_2$  sú jazyky. Definujeme

$$L_1/L_2 = \{w \in \Sigma_{L_1}^* \mid (\exists u \in L_2) wu \in L_1\}.$$

Túto operáciu nazývame pravý kvocient.

---

1. Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika, kde  $N = \{\alpha, \beta, \sigma\}$ ,  $T = \{a, b\}$  a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow \alpha\beta \mid \beta\alpha \\ & \beta \rightarrow \alpha\sigma \mid \sigma b \mid bab \\ & \alpha \rightarrow \beta\sigma\beta \mid \alpha\sigma a \mid aa \}. \end{aligned}$$

Preveďte túto gramatiku do Greibachovej normálneho tvaru.

2. Nech  $G = (N, T, P, \sigma)$  je bezkontextová gramatika, kde  $N = \{\sigma, \alpha\}$ ,  $T = \{a, b, c\}$  a

$$\begin{aligned} P = \{ & \sigma \rightarrow \sigma a \sigma b \mid \alpha b \mid c \\ & \alpha \rightarrow \alpha a \sigma \mid \sigma a \alpha b \mid a \}. \end{aligned}$$

K danej gramatike zostrojte PDA  $A$ , ktorý neobsahuje prechody na epsilon a má iba jeden stav a platí  $N(A) = L(G)$ .

3. Nech  $L = \{b^{2k+1}a^{n^2}b^{2l+1} \mid n, k, l \in \mathbb{N}^+\}$ . Pomocou Ogdenovej lemy dokážte, že jazyk  $L$  nie je bezkontextový.
4. Nech  $L = \{a^n d^{3k+2} b^n d^{7l+1} c^n \mid n, k, l \in \mathbb{N}^+\}$ . Pomocou Ogdenovej lemy dokážte, že jazyk  $L$  nie je bezkontextový.
5. Dokážte vetu o lineárnom priestore. Teda dokážte, že ak platí  $L \in NSPACE(O(n))$ , tak  $L \in \mathcal{L}_{ECS}$ . Potrebnú konštrukciu LBA spravte poriadne formálne. Jej správnosť slušne slovne zdôvodnite.
6. Rozhodnite a dokážte či je trieda  $\mathcal{L}_{ECS}$  uzavretá na pravý kvocient.
7. **Pre náročnejších:** Uvažujme problém: pre daný orientovaný graf  $G$  a dva jeho vrcholy  $u$  a  $v$  rozhodnúť, že medzi týmito vrcholmi **neexistuje** cesta. Rozhodnite a dokážte, či je tento problém riešiteľný na nedeterministickom turingovom stroji v logaritmickom priestore. Presnejšie, uvažujme nejaké vhodné kódovanie grafov nad abecedou  $\{0, 1, \#\}$ , ktorého veľkosť pre graf s  $N$  vrcholmi sa zmestí do  $O(N^2)$ . Možným vhodným kódovaním je uvažovať kód grafu ako zoznam jeho hrán. Prípadný stroj by nemal použiť viac ako  $O(\log N)$  políček pracovnej pásky.