

## SADA ÚLOH NA CVIČENIE 3

---

### Poznámka:

Ak zadanie požaduje skonštruovať rozšírenú kontextovú gramatiku, môžete skonštruovať „takmer rozšírenú kontextovú gramatiku“ ako sme si ukazovali na cvičeniach. Teda frázovú gramatiku, pre ktorú existuje pevná konštanta  $k$  taká, že v každom odvodení sa použijú „skraccujúce“ pravidlá najviac  $k$  krát. Túto vlastnosť skonštruovanej gramatiky treba samozrejme dokázať.

### Definície:

**Shuffle:** Nech  $L_1, L_2$  sú ľubovoľné jazyky. Operáciu  $\sqcup$  na jazykoch definujeme nasledovne:

$$L_1 \sqcup L_2 = \{u_1 v_1 \dots u_n v_n \mid n \geq 1; u_1, \dots, u_n \in \Sigma_{L_1}^*; v_1, \dots, v_n \in \Sigma_{L_2}^*; u_1 \dots u_n \in L_1; v_1 \dots v_n \in L_2\}$$

Operáciu  $\sqcup$  nazývame „shuffle“.

---

1. Nech  $\Sigma$  je abeceda, nech  $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ ,  $\Sigma_2 \subseteq \Sigma$ ,  $R \subseteq \Sigma \times \Sigma$  je relácia na  $\Sigma$  a  $L \subseteq \Sigma^*$  je jazyk definovaný nasledovne. Slovo  $w \in L$  práve vtedy keď platí  $w = \varepsilon$  alebo  $w = a_1 \dots a_n$  a sú splnené nasledovné podmienky:

- (i)  $a_1 \in \Sigma_1$
- (ii)  $a_n \in \Sigma_2$
- (iii)  $a_i R a_{i+1}$  pre  $0 \leq i < n$

Potom  $L \in \mathcal{R}$ . Poriadne dokážte!

2. Zostrojte rozšírenú kontextovú gramatiku pre jazyk  $L = \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Správnosť vašej konštrukcie poriadne zdôvodnite.
3. Zostrojte LBA, ktorý akceptuje jazyk  $L = \{a^n b^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Správnosť vašej konštrukcie poriadne zdôvodnite.
4. Formálne definujte (klasické 4 definície) viacpáskové<sup>1</sup> LBA a porovnajte ich silu s jedнопáskovými LBA. Vaša definícia by mala zabezpečiť, že vstup bude na začiatku na prvej páske a že vami definované viacpáskové LBA bude môcť použiť na každej zo svojich pásek najviac toľko políčok, koľko je dĺžka vstupu.
5. Formálne dokážte, že kontextové gramatiky, ktorých pravidlá navyše spĺňajú podmienku, že ich pravidlá majú na ľavej strane iba neterminály sú normálnym tvarom kontextových gramatík. Formálne má množina pravidiel  $P$  spĺňať nasledovné: (1)  $(\forall u \rightarrow v \in P) |u| \leq |v|$   
(2)  $P \subseteq_{kon} N^+ \times (N \cup T)^+$
6. Pre daný LBA  $A_1$  zostrojte LBA  $A_2$ , ktorý na vstupe  $w \in \{a\}^*$  generuje všetky konfigurácie  $A_1$  na dĺžke vstupu  $|w|$  v lexikografickom poradí. Po vygenerovaní konfigurácie má váš LBA prejsť do nejakého špeciálneho stavu. Z neho potom pokračuje generovaním ďalšej konfigurácie. V momente, keď váš LBA vygeneruje poslednú konfiguráciu, prejde do iného špeciálneho stavu a zastane. Už vygenerované konfigurácie si netreba nikde pamätať. *Hint:* myslíte na to, že do reprezentácie konfigurácie potrebujete zakomponovať aj informáciu o pozícii hlavy a stave  $A_1$ . To sa dá napríklad pomocou viacstopej pásky.
7. Dokážte, že trieda  $\mathcal{L}_{ECS}$  je uzavretá na operáciu shuffle.
8. Definujte operáciu  $\parallel$  na jazykoch nasledovne:

$$L_1 \parallel L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1; w_2 \in L_2; |w_1| = |w_2|\}.$$

Rozhodnite a dokážte, či je trieda  $\mathcal{L}_{ECS}$  uzavretá na operáciu  $\parallel$ .

---

<sup>1</sup>Každý viacpáskový LBA má fixný počet pásek.